ALGORITMO PARA LA COMPENSACION DE UN SISTEMA DE ECUACIONES POR EL METODO DE MINIMOS CUADRADOS

ING. ALEJANDRO AQUIJE R.

El algoritmo consiste en transformaciones homogéneas de una matriz rectangular que contiene: m+p filas y n+r columnas. Los elementos de la matriz son los coeficientes de las incógnitas, los términos independientes, y otros datos de entrada, antes de que el cálculo se inicie. Después de realizado un número adecuado de transformaciones, obtenemos como resultado: residuales, valores de las incógnitas, etc., en las posiciones de los datos de entrada.

INTRODUCCION

En las fórmulas presentadas a continuación

$$a_{ij}^{h}$$

representa el elemento de la fila i y de la columna j; obtenida después de la h-ada transformación. De acuerdo a este simbolismo los elementos de la matriz inicial serán:

$$\mathbf{a}_{ij}^{0}$$

Las fórmulas del algoritmo K son:

$$\mathbf{a}_{ih}^{h} = \frac{\mathbf{a}_{ij}^{h-1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{a}_{ih}^{h-1})^{2}}} \qquad (1)$$

$$a_{ij}^{h} = a_{ij}^{h-1} - \frac{a_{ih}^{h-1}}{\sum_{i=1}^{n} (a_{ih}^{h-1})^{2}} \sum_{i=1}^{n} a_{ih}^{h-1}\, a_{ij}^{h-1} \qquad (2)$$

donde:

i = 1,2,3,..m,m+1,...,m+p		(filas)
j = h+1,h+2,...,n+r		(columnas)
h= 1,2,3..n		(transformaciones)

En la primera transformación, la fórmula (1) se aplica para la primera columna (h=1), y la fórmula (2) se aplica para las siguientes columnas (j = 2,3,...,n+r).

En la segunda transformación, la fórmula (1) se aplica para la segunda columna (h = 2), y la fórmula (2) para las siguientes columnas (j = 3,4,....,n+r), y así sucesivamente.

Finalmente en la n–ada transformación la fórmula (1) se aplica para la n-ada columna (h = n), y la fórmula (2) para las siguientes columnas (j=n+1,n+2,.....,n+r).

Observamos que en la j – ada transformación las j – 1 columnas no varían.

Aplicaciones para la compensación de un Sistema de Ecuaciones de Observaciones.-

Sea el sistema siguiente, que contiene m ecuaciones de observaciones de peso uniforme, con n incógnitas (m>n)

$$\begin{aligned}
V_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n + l_1 \\
V_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \ldots\ldots a_{2n}x_n + l_2 \ldots\ldots \qquad (3) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
V_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n + l_m
\end{aligned}$$

Además consideremos las siguientes funciones o restricciones que deben cumplir las incógnitas:

$$\begin{aligned}
f_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots\ldots + \alpha_{1n}x_n + \phi_1 \\
f_2 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots\ldots + \alpha_{2n}x_n + \phi_2 \qquad (4) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_p &= \alpha_{p1}x_1 + \alpha_{p2}x_2 + \ldots\ldots + \alpha_{pn}x_n + \phi_p
\end{aligned}$$

Formamos ahora la matriz para el cálculo del algoritmo K, que nos permitirá calcular las residuales (3) y los valores de las funciones (4), junto con sus correspondientes errores medios. En un caso particular, las incógnitas: x_1, x_2,.... x_n pueden ser directamente calculadas en vez de las funciones (4) si asumimos

$f_1 = x_1 \quad f_2 = x_2$, etc.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot & \cdot & a_{1n} & l_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdot & \cdot & a_{2n} & l_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdot & \cdot & a_{mn} & l_m \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdot & \cdot & \alpha_{1n} & \phi_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdot & \cdot & \alpha_{2n} & \phi_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{p1} & \alpha_{p2} & \cdot & \cdot & \alpha_{pn} & \phi_p \end{bmatrix}$$

El orden de esta matriz es: (m+p)x(n+r). En este caso particular r=1.

Esta matriz es transformada n veces de acuerdo a las fórmulas del algoritmo K.

Luego que esta matriz es transformada tendrá los valores de las residuales y los valores de las funciones de las incógnitas en la última columna.

La matriz transformada se presentará en la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a^n_{11} & a^n_{12} & \cdot & \cdot & a^n_{1n} & v_1 \\ a^n_{21} & a^n_{22} & \cdot & \cdot & a^n_{2n} & v_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a^n_{m1} & a^n_{m2} & \cdot & \cdot & a^n_{mn} & v_m \\ \alpha^n_{11} & \alpha^n_{12} & \cdot & \cdot & \alpha^n_{1n} & f_1 \\ \alpha^n_{21} & \alpha^n_{22} & \cdot & \cdot & \alpha^n_{2n} & f_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha^n_{p1} & \alpha^n_{p2} & \cdot & \cdot & \alpha^n_{pn} & f_p \end{bmatrix}$$

El orden de esta matriz es (m=p)x(n=1).

El error medio de la ρ-ada función de las incógnitas es calculado sumando los cuadrados de los coeficientes transformados de la función, de acuerdo a la fórmula:

$$M_{f\rho} = M_0 \sqrt{\sum_{h=1}^{n} (\alpha^n_{\rho h})^2} \qquad (5)$$

$\rho = 1,2,3......,p$

mientras que el error medio de la i - ada observación compensada, es calculado sumando los cuadrados de los coeficientes transformados de la i - ada ecuación de la residual.

$$M_{11} = M_0 \sqrt{\sum_{h=1}^{n} (a^n_{ih})^2} \qquad (6) \qquad i = 1,2,....,m$$

donde Mo, es el error medio de peso unitario.

$$M_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (v_i)^2}{m-n}}$$

Si las observaciónes no son todas del mismo peso, deberán reducirse al mismo peso, multiplicando cada una de ellas por la raiz cuadrada de su peso.

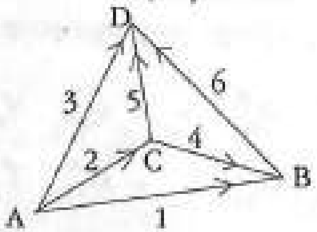
EJEMPLO

De la figura correspondiente a una red de nivelación, se tienen los siguientes datos:

		Diferencia de nivel: (H)	Distancia (s)	peso 1000/s
AB =	H1 =	10.8838 m	s1=11.67 Km	85
AC =	H2 =	4.6783	s2= 9.24	108
AD =	H3 =	18.5595	s3=20.42	49
CB =	H4 =	6.1963	s4= 6.05	165
CD =	H5 =	13.8677	s5=12.86	78
BD =	H6 =	7.6657	s6=16.58	60

El peso unidad corresponde a una longitud de 1000 Km.
Las flechas en la figura indican direcciones ascendentes.
Consideramos que la cota de A es de 50.0000 m.
Las alturas observadas (H) son los desniveles medidos en el campo.
Para compensar esta red, supondremos que las cotas de B, C y D sean:

$$\begin{aligned} B &= 50.0000 + H_1 + x_1 \\ C &= 50.0000 + H_2 + x_2 \\ D &= 50.0000 + H_3 + x_3 \end{aligned} \qquad (1)$$



donde x_1, x_2, x_3 son las correcciones correspondientes para que el circuito cierre.

Aplicando las ecuaciones de desnivel para las 6 líneas se tiene:

$$\begin{aligned} v_1 &= x_1 \\ v_2 &= x_2 \\ v_3 &= x_3 \\ v_4 &= x_1 - x_2 + H_1 - H_2 - H_4 = x_1 - x_2 + 0.0092 \\ v_5 &= -x_2 + x_3 - H_2 + H_3 - H_5 = -x_2 + x_3 + 0.0135 \\ v_6 &= -x_1 + x_3 - H_1 + H_3 - H_6 = -x_1 + x_3 + 0.0100 \end{aligned} \qquad (2)$$

la unidad usada es el metro.

Las 6 ecuaciones de observaciones son de la forma:

$$v_m = a_m x_1 + a_m x_2 + a_m x_3 + l_m \qquad \text{donde } m = 1,2,3....,6$$

Escritas en forma matricial serán:

m	Pesos	x1	x2	x3	1(cm.)
1	85	1	0	0	0
2	108	0	1	0	0
3	49	0	0	1	0
4	165	1	–1	0	0.92
5	78	0	–1	1	1.35
6	60	–1	0	1	1.00

los términos independientes los tomaremos al centímetro.

Previamente multiplicaremos cada ecuación por la raíz cuadrada de sus pesos respectivos, y agregamos la matriz unidad para obtener mediante el algoritmo K, los valores de x1, x2 y x3 directamente.

La matriz quedará así:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{85} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{108} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ \sqrt{165} & -\sqrt{165} & 0 & 0.92\sqrt{165} \\ 0 & \sqrt{78} & \sqrt{78} & 1.35\sqrt{78} \\ -\sqrt{60} & 0 & \sqrt{60} & 1.00\sqrt{60} \\ & & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz es de orden (6+3)x(3+1)

m=6 p=3
n=3 r=1

En la primera transformación, la fórmula (1) se aplica para la primera columna (h=1)

La fórmula (1) para estos valores se convertiría en este ejemplo:

$$a_{i1}^{1} = \frac{a_{i1}^{0}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{6} (a_{i1}^{0})^2}} \qquad \text{(I)'}$$

donde i = 1,2,3,...,9 (filas)

el desarrollo del sumatorio del denominador será:

$$\sum_{i=1}^{6} (a_{i1}^{0})^2 = (\sqrt{85})^2 + (0)^2 + (0)^2 + (\sqrt{165})^2 + (0)^2 + (-\sqrt{60})^2 = 310$$

luego:

$i=1$ $$a^1_{11} = \frac{a^0_{11}}{\sqrt{310}} = \frac{\sqrt{85}}{\sqrt{310}} = 0.5236$$

$i=2,3,5,8,9$ $$a^1_{21} = a^1_{31} = a^1_{51} = a^1_{81} = a^1_{91} = 0$$

$i=4$ $$a^1_{41} = \frac{a^0_{41}}{\sqrt{310}} = \frac{\sqrt{165}}{\sqrt{310}} = 0.7296$$

$i=6$ $$a^1_{61} = \frac{a^0_{61}}{\sqrt{310}} = \frac{-\sqrt{60}}{\sqrt{310}} = 0.4399$$

$i=7$ $$a^1_{71} = \frac{a^0_{71}}{\sqrt{310}} = \frac{1}{\sqrt{310}} = 0.0568$$

La fórmula (2) se aplica para j=2,3,4 h=1

$(j=2)$ $$a^1_{i2} = a^0_{i2} - \frac{a^0_{i1}}{\sum_{i=1}^{6}(a^0_{i1})^2} \sum_{i=1}^{6} a^0_{i1}\ a^0_{i2} \qquad (II)'$$ donde el último sumatorio es el producto escalar de dos vectores columnas de ordenes (6x1).

$$\sum_{i=1}^{6} a^0_{i1} a^0_{i2} = [\sqrt{85}.0+0.\sqrt{108}+0.0+(\sqrt{165})(-\sqrt{165})+0.\sqrt{78}+(-\sqrt{60}).0]=-165$$

reemplazando valores en (II)'

$$a^1_{i2} = a^0_{i2} - a^0_{i1}\ \frac{(-165)}{310}$$

$i=1$ $$a^1_{12} = a^0_{12} - a^0_{11}\frac{(-165)}{310} = 0-\sqrt{85}\frac{(-165)}{310} = 4.9072$$

$i=2$ $$a^1_{22} = a^0_{22} - a^0_{21}\frac{(-165)}{310} = \sqrt{108} - \frac{(-165)}{310} = 10.3923$$

etc

Para la primera transformada la matriz quedará en la siguiente forma:

0.5236	4.9072	x	x
0.	10.3923	x	x
0.	0.	x	x
0.7296	x	x	x
0.	x	x	x
–0.4399	x	x	x
0.0568	x	x	x
0.	x	x	x
0.	x	x	x

A esta matriz se le vuelve aplicar la fórmula (1) (h=2) :

$$a_{12}^2 = \frac{a_{12}^1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{6} (a_{12}^1)^2}} \qquad (I)"$$

como la fórmula lo indica se aplica a la segunda columna de esta última matriz

y la formula (2) se aplica para la tercera y cuarta columnas (j=3,4) (h=2)

$$(j=3) \quad a_{13}^2 = a_{13}^1 - a_{12}^1 \frac{\sum_{i=1}^{6} a_{12}^1 \, {}^1a_{13}}{\sum_{i=1}^{6} (a_{12}^1)^2} \qquad (II)"$$

y así sucesivamente se hacen tres transformaciones por que hay tres incógnitas.

Efectuando las tres transformaciones respectivas se obtienen:

0.5231	0.3022	0.3368	–1.6926
0.	0.6407	0.3818	5.0004
0.	0.	0.6153	–5.1957
0.7296	–0.3704	–0.0022	3.2770
0.	–0.5445	0.4518	1.1184
–0.4399	–0.2542	0.3976	3.4195
0.0568	0.0328	0.0366	–0.1843
0.	0.0616	0.0367	0.4808
0.	0.	0.0879	–0.7422

Los valores de x_1, x_2 y x_3 son:

$x_1 = -0.1843$ cm
$x_2 = 0.4808$
$x_3 = -0.7422$

$$\sum_{i=1}^{6} pv_1^2 = (-1.6926)^2 + (5.0004)^2 + (-5.1957)^2 + (3.2770)^2 + (1.1184)^2 + (3.4195)^2 = 78.5467$$

$$M_0 = \sqrt{\frac{78.5467}{6-3}} = \pm\ 5.1169\ cm$$

el error medio para 1 Km. sería:

$5.1169 / \sqrt{1000} = \pm\ 0.16$ cm

Los errores medios de las incógnitas serán:

$$M_{x_1} = M_0\sqrt{(0.0568)^2 + (0.0328)^2 + (0.0366)^2} = 0.3843\ cm$$

$$M_{x_2} = M_0\sqrt{0^2 + (0.0616)^2 + (0.0367)^2} = 0.3669$$

$$M_{x_3} = M_0\sqrt{0^2 + 0^2 + (0.0879)^2} = 0.4498$$

Los valores de las "v" serán:

$v_1 = -0.1836$ $v_2 = 0.4812$ $v_3 = -0.7422$
$v_4 = 0.2551$ $v_5 = 0.1266$ $v_6 = 0.4415$

obtenidos de la última columna de la matriz transformada, dividiéndola entre la raíz cuadrada de los pesos correspondientes.

Reemplazando valores en las ecuaciones (2) se obtienen:

$v_1 = -0.1843$ $v_2 = 0.4808$ $v_3 = -0.7422$
$v_4 = 0.2549$ $v_5 = 0.1270$ $v_6 = 0.4421$

(estos valores están dados en cm) que concuerdan con los valores obtenidos directamente de la matriz transformada. Haciendo el redondeo al décimo de milímetro, se tendrán los resultados siguientes:

Cotas

B = 60.8820 ± 0.0038 m
C = 54.6831 ± 0.0037 m
D = 68.5521 ± 0.0045 m

CONCLUSIONES .-

El algoritmo K, aunque no es apropiado para cálculos manuales, es muy conveniente para programación y computación. Las fórmulas cíclicas (1) y (2) definen este algoritmo que permite resolver muchos problemas por medio del método de mínimos cuadrados, sin necesidad de obtener: las ecuaciones normales, la solución directa e inversa, cálculo de residuales, etc.. Es especialmente recomendado donde se necesite conocer todas las características de precisión de los resultados de la compensación.

BIBLIOGRAFIA

T. Banachiewicz : The Cracovian Calculation
J. Gazdzicki : New Algorithms of Adjusment by Means of the Method of Least Squares.
R. Doerfling : Tratado de Matemáticas para Ingenieros.