ESTIMADORES ROBUSTOS DE POSICION

MG. MÁXIMO MITACC MEZA

Este trabajo se ocupa de problemas de robustez, y en particular de los estimadores robustos de posición.

Dado una muestra de tamaño finito n, se proponen varios estimadores para el parámetro de posición de una población determinada. Para cada estimador se determina su medida de sensibilidad, con la finalidad de determinar si estos estimadores son robustos en el sentido de que sean resistentes a la influencia de una observación separada de la masa de datos.

1.- INTRODUCCION

En toda época, el conocimiento humano de un modo general se ocupó en construir modelos para poder explicar el comportamiento de un fenómeno de la naturaleza. En particular los estadísticos crearon métodos y modelos para hacer el estudio de los datos, y de esta manera obtener información útil y válida sobre alguna característica de la población en estudio.

En el presente siglo se han dado cinco mayores desarrollos en Estadística:

Primero,la contribución conceptual dada por R.A. FISHER (1921), JERSEY NEYMANN y EGON PEARSON (1933); segundo, la influencia de la teoría de la medida por KOLMOGOROV (1933); tercero,el desarrollo tecnológico muy rápido de las computadoras;cuarto, el descubrimiento de distribuciones libres altamente eficientes; y quinto la robustización de muchos procedimientos clásicos. Sobre todo en los últimos 30 años, estadísticos de todas las ciencias han hecho aportes bajo la bandera de la robustez. Específicamente HUBER (1964) y HAMPEL (1968) han sido los modernos periodistas dedicados a escribir artículos sobre robustez, probablemente porque comprendieron la aceptación de la idea de que muchos estudios estadísticos nuevos eran incompletos sin dar una atención seria al efecto de cambios leves en las suposiciones que se hacen sobre el fenómeno físico en estudio.

Para hacer posible la construcción de un modelo que explique el comportamiento del fenómeno, es necesario hacer suposiciones sobre el fenómeno en estudio, suposiciones que son difíciles de probar, o que son hechas como una primera aproximación ó porque fueron hechas en estudios parecidos o, peor aún, se desea forzar una realidad para que se justifique una aplicación de cierta técnica. De todas maneras, a partir del modelo que juzgamos (subjetivamente en mayor o menor medida) como el más adecuado, deducimos ciertas técnicas de inferencia. Como nunca podemos tener la certeza de la validez de las suposiciones que nos han conducido a la construcción de estas técnicas es natural que busquemos técnicas o procedimientos que sean en cierto modo resistentes a los desvios de las suposiciones hechas. A estas técnicas se le denominan "procedimientos robustos".

Por lo expuesto, diremos que un procedimiento estadístico es robusto si no es muy sensible a las desviaciones de las suposiciones en las cuáles se basa.

HAMPEL F.R. (1968) sostiene de que las razones por las que las desviaciones antes mencionadas se hacen siempre presentes son:

a) **Ocurrencias de errores groseros (OUTLIER)**, significa que un valor observado puede haber sido copiado incorrectamente o mal medido por el instrumento de medición.

b) **Ocurrencias de errores de redondeo**, esto ocurre por la limitación de precisión en todas las mediciones, ocurre especialmente en los datos provenientes de variables continuas, pues deben ser inevitablemente redondeadas.

c) **Los provenientes de la aproximación del modelo a la realidad**, debido a la dificultad que tenemos para trabajar con el modelo real. Como ejemplo, tenemos, lo que ocurre con el teorema del límite central.

En resumen, queremos obtener estimadores cuyas distribuciones se alteren levemente cuando la distribución real de las observaciones se alejen ligeramente del modelo paramétrico propuesto.

2.- PARAMETROS DE POSICION

Hay muchas razones para recolectar y examinar datos, pero nuestra atención se restringirá a situaciones donde los datos pueden ser considerados como una muestra de valores numéricos seleccionados de una población determinada. Aquí la forma idealizada de la población será representada por su distribución acumulada de probabilidad F. Trataremos de ver que la distribución de los datos es F, y más aún si podemos examinar toda la población, muchas posibles F's pueden ser modelos adecuados para los datos. Realmente se trata de encontrar una distribución F para los datos, o una familia ψ de F's, la cual puede representar a la población de la que se extraen los datos, y que es conveniente manipular matemáticamente.

Además, en el contexto científico de la población podemos encontrar una medida para los paramétros desconocidos de la familia ψ.

Definición 1.- Sea X una variable aleatoria con distribución acumulada de probabilidad F y que para cada número real μ denotamos la distribución de $X + \mu$ por F_μ. Entonces $\{F_\mu / \mu \in R\}$ se denomina familia de distribuciones de probabilidad de parámetros de posición μ generados por F. De acuerdo con esta definición tenemos:

$$F_\mu(x) = P[\, X + \mu \leq x \,] = P[\, X \leq x - \mu \,] = F(\, x - \mu), \; x \in R$$

Si F tiene función de densidad f, entonces diremos que el parámetro μ es un parámetro de posición, si la función de densidad $f(x;\mu)$ puede ser escrita como una función de $x - \mu$, es decir; $f(x;\mu) = h(x - \mu)$.

En resumen podemos decir que, μ es parámetro de posición de la población generada por F, si la distribución de $X - \mu$ es independiente de μ, dónde X es la característica de la población en estudio.

Ejemplo Nº1.- Si X es una variable aleatoria con distribución $N(\mu,1)$, entonces μ es paramêtro de posición de la población generada por $N(\mu,1)$, pues $(X - \mu)$ es $N(0,1)$.

Ejemplo Nº2.- Si X es una variable aleatoria, con distribución uniforme $(\theta - 1/2,\ \theta + 1/2)$, entonces θ es parámetro de posición, pues:

$$f(x;\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \langle \theta - 1/2,\ \theta + 1/2 \rangle 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = \begin{cases} \text{si } -1/2 < x - \theta < 1/2 \\ 0 \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } -1/2 < y < 1/2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} = h(y);\ \text{dónde } y = x - \theta.$$

3.- ESTIMADORES ROBUSTOS DE POSICION

Dado el parámetro de posición μ y la hipótesis común de la inferencia parámetrica clásica de que la distribución de alguna característica en estudio X es:

$F_{\mu} = F(x-\mu)$ $x \in R$, queremos encontrar técnicas alternativas de estimación a la sugerida por el método habitual: « método de máxima verosimilitud » . Hacemos esto, porque el método de máxima verosimilitud nos conduce a tomar como estimador de la media poblacional μ a la media muestral:

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i / n$$

Que tiene un comportamiento muy desagradable cuándo la distribución de la característica en estudio X, no tiene disribución normal.

Por ejemplo (3), si $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$, es una muestra seleccionada de alguna población tal que:

$X_1=5, X_2=6, X_3=7, X_4=8, X_5=9, X_6=10, X_7=11, X_8=12, X_9=13, X_{10}=14$. Entonces:

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{10} X_i/10 = 95/10 = 9.5.$$

Si cambiamos el valor de $X_{10}=14$ por $X_{10}=14{,}000$,

entonces:

$$\bar{X} = \frac{5 + 6 + \ldots + 13 + 14{,}000}{10} = 1{,}408.1.$$

así vemos que el cambio de una observación del conjunto de datos modificó drásticamente el valor del estimador $\bar{X}$. Esto es, el estimador $\bar{X}$ de μ no es resistente a los cambios que se puede hacer a una pequeña parte de los datos.

A continuación presentamos algunos estimadores del parámetro de posición μ de la población generada por la distribución F.

3.1. L-ESTIMADORES

Definición 2.- Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$, una muestra aleatoria seleccionada de una población con función de distribución acumulada $F(x) = P[X \leq x]$. Las variables aleatorias denotadas por Y_j, $j = 1, 2, \ldots n$, esto es:

$Y_1 = \min\{ X_1, \ldots, X_n \}$
$Y_2 = \min\{ \{X_1, \ldots, X_n\} - Y_1 \}$
.
.
$Y_n = \max\{ X_1, \ldots, X_n \}$.

tal que $Y_1 \leq Y_2 \leq ... \leq Y_n$, se denominan estadísticas de orden correspondientes a la muestra aleatoria $X_1, ... X_n$.

Definición 3.- Sean $Y_1, Y_2, ... Y_n$, las estadísticas de orden correspondiente a una m.a. $X_1, ..., X_n$, seleccionada de una población con distribución

$F\mu(x) = F(x - \mu)$, para todo $x \in R_s$.

Sean además $a_1, ..., a_n$, números reales tal que $0 \leq a_i \leq 1$, si $i = 1,2,..n$.

y $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Un L-estimador del parámetro de posición μ con ponderaciones $a_1, ... a_n$, es dado por:

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} a_i Y_i$$

Se prueba que el parámetro de posición de una distribución simétrica es el centro de la simetría. Esta propiedad, combinada con las propiedades correspondientes de simetría de estadísticos de orden, nos conduce, cuando trabajamos con distribuciones simétricas a considerar solamente L-estimadores con ponderaciones simétricas.

Asi, todos los L-estimadores considerados en este trabajo satisfacen la condición de que $a_i = a_{n+1-i}$, $i = 1, 2, ... , n/2$.

Asi, los L-estimadores nos proveen estimadores insesgados del parámetro de posición μ. Estos tipos de L-estimadores son:

I.- MEDIANA MUESTRAL

Sea $X_1, X_2, ... X_n$, una muestra aleatoria seleccionada de una población con distribución $F\mu(x)$. Se denomina estimador mediana muestral del parámetro de posición μ a la estadística dada por:

$$\bar{\mu}_{med} = med(X_1, ... X_n) = \begin{cases} Y_k & , \quad si\ n = 2k + 1 \\ (Y_k + Y_{k+1})/2, & si\ n = 2k \end{cases}$$

II.- MEDIA α - TRUNCADA

Sea $0 < \alpha < 1/2$. Se denomina media α -truncada de la muestra aleatoria $X_1, ... X_n$, al L-estimador del parámetro de posición μ dado por:

$$\hat{\mu}_\alpha = \bar{X}_\alpha = \frac{1}{n-2[[n\alpha]]} \sum_{i=[[n\alpha]]+1}^{n-[[n\alpha]]} Y_i.$$

Los valores de α que se utilizan con mayor frecuencia son los α tal que: $0.05 \leq \alpha \leq 0.15$. Se observa que el estimador trunca o deja afuera una proporción α de los valores mayores de $X_1, \ldots, X_n$, y una proporción igual de los valores menores y toma solo la media de los valores centrales restantes.

Por ejemplo, si $n = 40$ y $\alpha = 0.10$, entonces deja fuera $[[n\alpha]] = 4$ observaciones de mayor valor y 4 observaciones de menor valor. Luego se tiene:

$$\overline{X}_\alpha = \frac{\sum_{i=5}^{36} Y_i}{32}$$

III.- MEDIA α - WINSORIZADA

Sea $0 < \alpha < 1/2$. Se denomina media α - winsorizada de la muestra aleatoria. $X_1, X_2, \ldots X_n$, al L-estimador del parámetro de posición μ dado por:

$$\overline{X}_{\alpha,\omega} = \frac{1}{n} \left[(1 + [[n\alpha]]) (Y_{([[n\alpha]]+1)} + Y_{(n-[[n\alpha]])}) + \sum_{i=[[n\alpha]]+2}^{n-[[n\alpha]]-1} \right] Y_i$$

Se observa que este estimador promedia los valores centrales de la muestra aleatoria. $X_1, X_2, \ldots, X_n$, dejando fuera una proporción α de valores mayores y una proporción igual de valores menores. Los valores mayor y menor de los valores centrales restantes reciben una ponderación de $[[n\alpha]] + 1$ y el resto de valores centrales una ponderación igual a 1, de modo que la suma de ponderaciones es igual a n.

IV.- TRI- MEDIA

Se denomina estimador tri-media (ó m-estimador de GASTWIRTH- RUBIN)del parámetro de posición μ basado en la muestra aleatoria. $X_1, X_2, \ldots X_n$, al L-estimador dado por:

$$\overline{X}_{GR} = \frac{1}{4} \left[Y_{([[n/4]]+1)} + 2MED(X_1, \ldots, X_n) + Y_{(n-[[n/4]])} \right]$$

Ejemplo Nº3. Dada la siguiente tabla de datos hipotéticos, calcular la media, mediana, $\overline{X}_{0.05}$, $\overline{X}_{0.10}$, $\overline{X}_{0.15}$, $\overline{X}_{0.05,\omega}$, $\overline{X}_{0.15,\omega}$ y la tri-media.

TABLA 1	DATOS HIPOTETICOS			
	38	-34	39	40
	36	37	32	33
	43	26	34	39
	34	50	31	41
	44	08	35	29

Solución

Las estadísticas de orden de los datos de la tabla 1 son los siguientes:

i	Y_i	i	Y_i	i	Y_i	i	Y_i
1	-34	6	32	11	36	16	40
2	08	7	33	12	37	17	41
3	26	8	34	10	38	18	43
4	29	9	34	14	39	19	44
5	31	10	35	15	39	20	50

Haciendo los cálculos respectivos, obtenemos:

$$\text{i)}\quad \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{20} Y_i}{20} = \frac{635}{20} = 31.75.$$

ii) Para el cálculo de la mediana tenemos: n = 20 (par), entonces k = 10; luego:

$$MED_{(x_1,\ldots,x_{20})} = \frac{Y_{10} + Y_{11}}{2} = \frac{35 + 36}{2} = 35.5$$

iii) Los estimadores media α -truncadas son:

$$\bar{X}_{0.05} = \frac{1}{18} \sum_{i=2}^{19} Y_i = \frac{619}{18} = 34.39$$

$$\bar{X}_{0.10} = \frac{1}{16} \sum_{i=3}^{18} Y_i = \frac{567}{16} = 35.44$$

$$\bar{X}_{0.15} = \frac{1}{14} \sum_{i=4}^{17} Y_i = \frac{498}{14} = 35.57$$

iv) Los estimadores media α - winsorizadas son:

$$\bar{X}_{0.05,\omega} = \frac{1}{20}\left[2(Y_2 + Y_{19}) + \sum_{i=3}^{18} Y_i \right] = \frac{671}{20} = 33.55$$

$$\bar{X}_{0.10,\omega} = \frac{1}{20}\left[3(Y_3 + Y_{18}) + \sum_{i=4}^{17} Y_i \right] = \frac{705}{20} = 35.25$$

$$\bar{X}_{0.15,\omega} = \frac{1}{20}\left[4(Y_4 + Y_{17}) + \sum_{i=5}^{16} Y_i \right] = \frac{708}{20} = 35.40$$

v) El valor del estimador tri- media es:

$$\bar{X}_{GR} = \frac{1}{4}\left[Y_6 + 2\text{MED}\,(X_1, \dots, X_{20}) + Y_{15}\right] = \frac{142}{4} = 35.5$$

Estos resultados muestran la inestabilidad de la media muestral ocasionado por la influencia del mayor y menor valor observado. Para estos datos, después de calcular la media α -truncada (media α -winsorizada) para $\alpha = 0.10$, esto es, dejando fuera los dos valores menores y los dos mayores, las medias α -truncadas (medias α -winsorizadas) son muy similares, dando así una confianza de estabilidad del estimador.

4.- MEDIDAS DE SENSIBILIDAD DE LOS ESTIMADORES

En el ejemplo (3), vimos como el cambio del valor de una observación por otro valor más grande en magnitud cambia el valor del estimador media muestral. Entonces cabe preguntarse lo siguiente: ¿cómo podemos determinar la influencia de una observación en el valor del estimador?. La respuesta a esta pregunta fue dada, desde el punto de vista muestras pequeñas (finitas) por TUCKEY a travéz de las "curvas de sensibilidad ", y desde el punto de vista de muestras grandes (asintótico) por HAMPEL por medio de las "curvas de influencia "

4.1. CURVA DE SENSIBILIDAD

Sea $X_1,\ldots, X_{n-1}$, valores de una m.a. de tamaño n-1 seleccionada de una población con distribución $F\mu(X)$, y sea $T_{n-1}(X_1,\ldots,X_{n-1})$ el estimador del parámetro de posición μ. Entonces, el cambio en el valor del estimador cuando el valor de la n-ésima observación igual a x es incluído será:

$$Tn\,(X_1,\ldots,X_{n-1}, x) - T_{n-1}(X_1,\ldots,X_{n-1})$$

Definición 4.- Se denomina curva de sensibilidad del estimador T_n con respecto a T_{n-1} a la función real:

CS_{n-1}: $R \rightarrow R$ definida por:
$$CS_{n-1}(x) = n[T_n(X_1,\ldots,X_{n-1},x) - T_{n-1}(X_1,..X_{n-1})].$$

Aquí observamos primeramente que la curva de sensibilidad es función de la observación adicional x, pero también depende de la m.a. y de la forma del estimador.

De acuerdo a la definición de curva de sensibilidad, podemos decir que un estimador del parámetro de posición μ es *robusto*,en el sentido de que es resistente a la influencia de una única observación separada de la masa de datos, si su función "curva de sensibilidad" es acotada.

<u>Ejemplo N°4</u>. Para los datos hipóteticos del ejemplo 3, calcular las curvas de sensibilidad de la media muestral, mediana muestral, media 0.10-truncada y media 0.10-winsorizada.

<u>Solución</u>

i) Para el estimador media muestral, tenemos:

$$\bar{T}_{20}\,(x_1,\ldots,x_{20}) = \bar{X}_{20} = \frac{\sum_{i=1}^{20} xi}{20} = \frac{635}{20} = 31.75$$

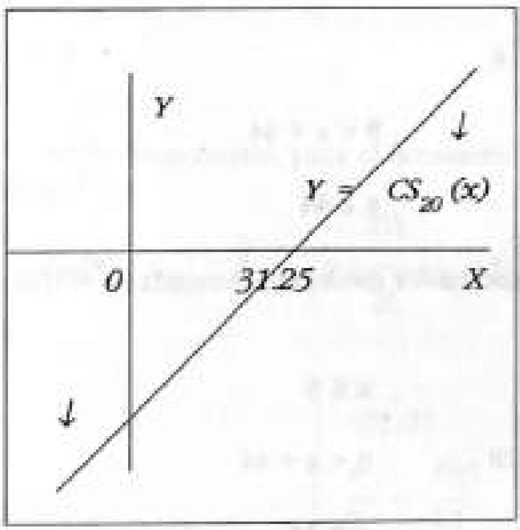
$$T_{21}(x_1,\ldots,x_{20},x) \quad = \quad \overline{X}_{21} = \frac{635 + x}{21}$$

Luego, la curva de sensibilidad del estimador $\overline{X}_{21}$ con respecto a $\overline{X}_{20}$ es:

$$CS_{20}(x) \quad = 21\left[\frac{635 + x}{21} - \frac{635}{20}\right] = x - 31.75, \ \forall x \in R.$$

La gráfica de esta función se muestra en la figura 1.1.

De acuerdo a esta gráfica, vemos que una observación x influye, "alterando el valor de la media muestral en la misma medida que esa observación se aleja de la masa de datos".



Figu. 1.1

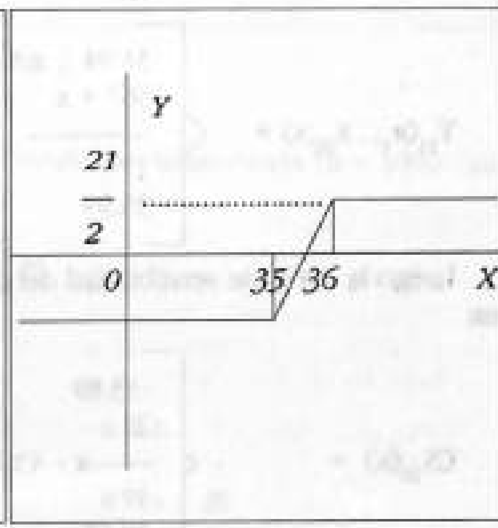


Fig. 1.2

i) Para el estimador mediana muestral, se tiene:

$$T_{20}(x_1,\ldots x_{20}) \quad = MED(x_1,\ldots x_{20}) = \frac{35 + 36}{2} = 35.5$$

$$T_{21}(x_1,\ldots x_{20},x) \quad = MED(x_1,\ldots x_{20},x) \quad = \left[\begin{array}{lll} 35 & , & x \leq 35 \\ x & , & 35 < x < 36 \\ 36 & , & x \geq 36 \end{array}\right.$$

97

Asi, la curva de sensibilidad del estimador mediana muestral es :

$$CS_{20}(x) = 21[MED(x_1,...x_{21},x) - 35.5] = \begin{cases} -21/2 & , x \leq 35 \\ 21(x - 35.5), & 35 < x < 36 \\ 21/2 & , x \geq 36 \end{cases}$$

La gráfica de esta función se muestra en la figura 1.2. En esta observamos que el valor de "x" tal que $x \leq 35$ ó $x \geq 36$ no cambia su influencia (influencia constante) sobre el valor del estimador mediana muestral, a medida que estos valores se alejan de las observaciones centrales que se encuentran entre 35 y 36.

iii) Para el estimador media α - truncada (α = 10%), tenemos:

$$T_{20}(x_1,...x_{20}) = \bar{x}_{0.10} = \frac{567}{16} = 35.44$$

$$T_{21}(x_1,...x_{20},x) = \begin{cases} 31.94 & , x \leq 8 \\ \dfrac{567 + x}{17} & , 8 < x < 44 \\ 35.94 & , x \geq 44 \end{cases}$$

Luego la curva de sensibilidad del estimador media α - truncada (α = 10%) es:

$$CS_{20}(x) = \begin{cases} -33.89 & , x \leq 8 \\ \dfrac{21}{17}x - 43.78 & , 8 < x < 44 \\ 10.58 & , x \geq 44 \end{cases}$$

La gráfica se muestra en la figura 1.3. Esta gráfica es similar a la gráfica de la curva de sensibilidad de la mediana, con la única diferencia de que su inclinación es menos acentuada, lo cual revela entre otras cosas, que el estimador media α - truncada considera una proporción mayor de los datos centrales que la mediana.

De la gráfica 1.3, podemos decir que, despúes del punto 8 (a la izquierda) y 44 (a la derecha), todos los valores de "x" tienen igual influencia sobre el valor del estimador media α - truncada, para α = 10%.

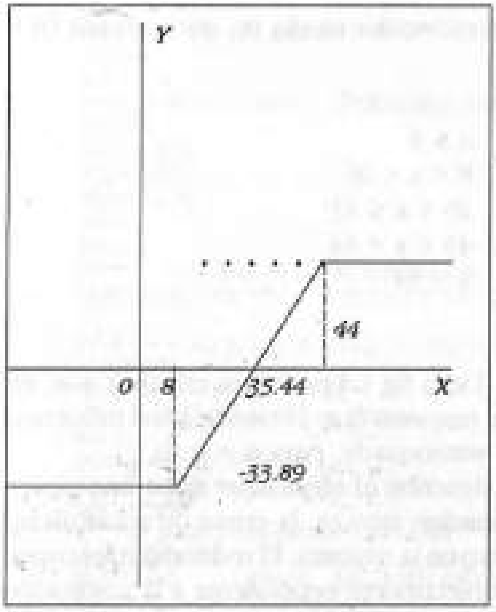


Fig. 1.3

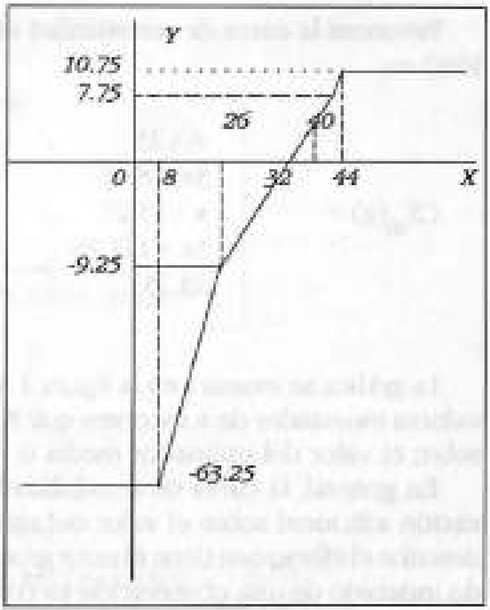


Fig. 1.4

iv) Análogamente, para el estimador media α - winsorizada (α = 10%) se tiene:

$$T_{20}(x_1,...x_{20}) = \bar{X}_{0.10,\omega} = \frac{705}{20} = 35.25$$

$$T_{21}(x_1,...x_{20},x) = \begin{cases} 671/21 & , \quad x \leq 8 \\ \dfrac{x}{7} + \dfrac{653}{21} & , \quad 8 < x < 26 \\ \dfrac{x}{21} + \dfrac{705}{21} & , \quad 26 \leq x \leq 43 \\ \dfrac{x}{7} + \dfrac{619}{21} & , \quad 43 < x < 44 \\ 751/21 & , \quad x \geq 44 \end{cases}$$

Entonces la curva de sensibilidad del estimador media α - winsorizada (α = 10%) es:

$$CS_{20}(x) = \begin{cases} -63.25 & , \quad x \leq 8 \\ 3x - 87.25 & , \quad 8 < x < 26 \\ x - 35.25 & , \quad 26 \leq x \leq 43 \\ 3x - 121.25 & , \quad 43 < x < 44 \\ 10.75 & , \quad x \geq 44 \end{cases}$$

La gráfica se muestra en la figura 1.4. De la fig.1.4 podemos concluir que, los valores muestrales de x menores que 8 y mayores que 44 tienen igual influencia sobre el valor del estimador media α - winsorizada, para α = 0.10.

En general, la curva de sensibilidad describe el efecto que tiene una observación adicional sobre el valor del estimador; esto es, la curva de sensibilidad describe el efecto que tiene el error grosero en la muestra. El redondeo o el copiado indebido de una observación es completamente equivalente a la sustitución de una observación por otra. Así, la curva de sensibilidad muestra como el redondeo o el copiado indebido de una observación afecta el valor de un estimador.

En resumen, la curva de sensibilidad nos da una manera de estudiar ambos aspectos de la resistencia de un estimador.

5.- BIBLIOGRAFIA

1.- HAMPEL, F.R. (1968) Contributions to the theory of robust estimation

2.- HUBER, P. I. (1981) Robust Statistics, Wiley, New York.

3.- BUSTOS, O. H. (1981) Estimação robusta no modelo de posição 13avo. coloquio brasileiro de matemática.


```
    PROGRAM  TRABAJO1; USES CRT; CONST   M = 50; TYPE   TABLA  =  ARRAY[1..M]  OF
INTEGER; VAR  ME,MA,VER,MT,MW,TR,ALFA:REAL;
        FALSO:CHAR;
        X:TABLA;
        A,I,N,K,S,J,AUX,ST,SW,ALFA1:INTEGER;
    BEGIN
        (***      LECTURA DE DATOS     ****)
        WRITELN('CUANTOS DATOS DESEA PROCESAR');
        READLN(N);
        FOR I:=1 TO N DO
        BEGIN
         WRITE('INGRESAR DATO',I:2,'');
         READ(X[I]);
        END;
        WRITELN(' ':10,'****       LISTA DE DATOS           **** ');
        FOR I:=1 TO N DO WRITE(' ':5,X[I]:5);
        WRITELN;
        WRITELN;
        (****     PROCESO PARA ORDENAR LOS DATOS ****)
```

```
FOR I:= 1 TO N-1 DO
BEGIN
K:= I + 1;
FOR J:= K TO N DO       IF(X[I]>X[J]) THEN
BEGIN
AUX:= X[I];
X[I]:= X[J];
X[J]:= AUX;
END;
END;
(*****     IMPRESION DE RESULTADOS     *****)
WRITELN(' ':10, '***        LISTA DE DATOS ORDENADOS ***');

FOR I:= 1 TO N DO WRITE(' ':5, X[I]:5);
WRITELN;
WRITELN;
(****      CALCULO DE LA MEDIA          ****)
S:= 0;
FOR I:= 1 TO N DO
S := S + X[I];
MA := S/N;
(*****     CALCULO DE LA MEDIANA        *****)
A:= N DIV 2;
IF(A*2=N)          THEN    ME:=(X[N DIV 2]+X[N DIV 2+1])/2

ELSE     ME:=(X[(N DIV 2) + 1]);

(*****     CALCULO DE LA VARIANZA       *****)
VER := 0;
FOR I:= 1 TO N DO
VER := VER + ((X[I] - MA)*(X[I] - MA));
VER := VER/N;
(*****     CALCULO DE LA MEDIA ALFA TRUNCADA        *****)
ST:=0;
ALFA:=0.05;
ALFA1:=TRUNC(N*ALFA);
FOR I := ALFA+1 TO (N-ALFA1) DO
ST:= ST + X[I];
MT:= ST/(N-2*ALFA1);
(*****     CALCULO DE LA MEDIA WINSDORIZADA         *****)
SW :=0;
FOR I:=ALFA1+2 TO (N- ALFA1-1) DO
SW:=SW + X[I];
MW:=((1 + ALFA1)*(X[ALFA1 + 1] + X[N-ALFA1])+SW)/N;
(*****     CALCULO DE LA TRI MEDIA      *****)
TR:=0;
TR:= (X[TRUNC(N/4)+1]+2*ME + X[N-TRUNC(N/4)])/4;
(*****     IMPRESION DE RESULTADOS     *****)
WRITELN(' ':10, ' ****      IMPRESION DE RESULTADOS ****');
WRITELN;
WRITELN(' ':10, 'MEDIA = ', MA:10:3);
WRITELN(' ':10, 'MEDIANA         = ', ME:10:3);
WRITELN(' ':10, 'VARIANZA = ', VER:11:3);
WRITELN(' ':10, 'MEDIA TR = ', MT:11:3);
WRITELN(' ':10, 'MEDIA WS = ', MW:11:3);
WRITELN(' ':10, 'TRI MEDIA= ', TR:10:3);
FALSO:=READKEY;
END.
```