Aplicaciones del método Monte Carlo

Mario Rojas Delgado

Ingeniero químico industrial por la Universidad Nacional de Ingeniería. Es profesor de las áreas de Tecnología y Producción de la Facultad de Ingeniería Industrial de la Universidad de Lima.

Un método numérico muy antiguo es examinado para conocer su utilidad actual y sus aplicaciones en los últimos treinta años bajo la influencia de los sistemas de computación digital aplicada.

Se citan los conceptos y elementos principales de los métodos Monte Carlo para el diseño y ejecución, tanto de cálculo numérico como de simulación de sistemas.

Se delinean algunas aplicaciones, mostrándose ejemplos de cálculo manual y resultados usando software de computadores digitales.

La conclusión es que estos métodos tienen uso actual y han ampliado sus aplicaciónes en física, matemática, economía, y ciencias de ingeniería y gestión.

1. Introducción

1.1 Antecedentes y definiciones

Los métodos numéricos conocidos como métodos Monte Carlo pueden definirse como procesos de simulación estadística, la cual en términos generales implica el uso de números pseudo aleatorios para ejecutar experimentos mediante una computadora digital, no obstante que también pueden hacerse manualmente. Eso explica el por qué dichos métodos se han empleado desde hace siglos, pero recién en las últimas décadas se han impuesto en el estudio de aplicaciones muy complejas, gracias al desarrollo de *hardware* y *software* para computadoras digitales. El nombre Monte Carlo se empezó a usar durante el Proyecto Manhattan de la Segunda Guerra Mundial, asociando la idea de la simulación estadística con los juegos de azar propios de esa ciudad.

Los métodos de simulación estadística pueden compararse con los métodos convencionales de discretización empleados en el modelado de sistemas con ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales. Con los métodos Monte Carlo los procesos físicos pueden ser simulados directamente, aún sin plantear las ecuaciones que describen el sistema. El principal requisito es disponer de una función de densidad de probabilidad (FDP) inherente a la descripción del proceso en estudio.

Debe considerarse que el modelado de un sistema es la relación entre el sistema real y el modelo matemático que lo describe, en tanto que la simulación es la relación entre el modelo y los experimentos que se hacen con un algún medio de cálculo, como por ejemplo una computadora y el *software* adecuado.

Una vez conocida una FDP, la simulación Monte Carlo procede con un muestreo aleatorio sobre la FDP. Se hacen muchos ensayos o pruebas, y se obtienen resultados promedios a partir de algunas o millones de pruebas, según sea el caso. En casos avanzados se puede conseguir estimar el error estadístico (varianza) de los promedios para optimizar el número de ensayos.

1.2 Principales componentes de los métodos Monte Carlo

1.2.1 Monte Carlo simple

- Función de distribución de probabilidad (FDP).
  El sistema debe asociarse con un juego de FDP.

- Generador de números pseudoaleatorios.
  Una fuente de números aleatorios distribuidos uniformemente en el intervalo [0,1].
- Regla de muestreo.
- Rangos para ubicar los valores generados.

1.2.2 Monte Carlo avanzado

Además de los componentes indicados anteriormente, se tienen:

- Estimación del error.
- Técnicas de reducción de varianza.
  Reducción de la varianza para controlar el tiempo de computación.
- Vectorización y paralelización.
  Algoritmos para usar los métodos Monte Carlo en arquitectura avanzadas de computadoras.

1.3 Algunas funciones y distribuciones de probabilidad

a. Distribución uniforme en el intervalo [a,b]

Función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & \text{Sí } a<x<b \\ 0 & \text{otros valores de } x \end{cases}$$

Distribución: $F(x) = (x-a)/(b-a)$
Variable aleatoria: $x = a + (b-a)r$

Siendo r una variable aleatoria independiente con distribución uniforme en el intervalo [0,1].

La media (μ) es $(b+a)/2$

b. Distribución exponencial
Función de densidad: $f(x) = \alpha \, EXP[-\alpha x]$
Distribución: $F(x) = 1 - EXP[-\alpha x]$
Variable aleatoria: $x = [Log(1-r)] / \alpha$
Siendo la media $\mu = 1 / \alpha$
y la varianza $\alpha = 1 / \alpha^2$

c. Distribución normal

Función de densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}} EXP[-(X-\mu)^2 / 2\sigma^2]$$

Variable aleatoria:

$$x = \left[(\sum_{1}^{12} r_i - 6)\sigma + \mu\right]$$

Para n=12 valores de r

d. Distribución lognormal

Considerando:

$$y = \text{Log } x$$

Función de densidad:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}} EXP[-(y-\mu)^2 / 2\sigma^2]$$

Variable aleatoria:

$$x = EXP[(\sum_{1}^{12} r_i - 6)\sigma + \mu]$$

Para n=12 valores de r

e. Distribución de Poisson

Distribución:

$$F(x=k) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$$

Donde la media y la varianza tienen un mismo valor igual a λ

f. Distribución empírica (discreta o continua)
A partir de los valores medidos para la variable en estudio, incluyendo las respectivas frecuencias, se pueden establecer la probabilidad y la probabilidad acumulada en forma tabular y/o gráfica permitiendo por consiguiente la información necesaria para su aplicación.

1.4 Simulación Monte Carlo en sistemas físicos

En cierto sentido Monte Carlo (MC) es una técnica de simulación con base molecular. MC considera un pequeño número de moléculas para representar sistemas macroscópicos mediante artificios, tales como fronteras periódicas. En la simulación MC las moléculas o iones son confinadas en cajas o celdas. En cada etapa una molécula escogida aleatoriamente es movida aleatoriamente hacia una nueva ubicación, la computadora determina si la nueva ubicación es factible con los cambios de energía correspondientes.

Se repiten los ensayos hasta la estabilización del valor de la energía, lo cual indica que se ha alcanzado el equilibrio termodinámico, promediándose los valores de las propiedades físicas estimadas durante todos los ensayos

El concepto de partícula móvil aleatoria (random walker) puede emplearse para el análisis de casos en matemática, física, química, economía y otras ciencias.

La simulación Monte Carlo se aplica en variados temas:

- Dinámica molecular
- Reacciones químicas
- Física estadística
- Diseño de reactores nucleares
- Terapia radiactiva de cáncer
- Evolución estelar
- Econometría
- Pronósticos Dow-Jones
- Exploración de pozos petroleros
- Diseño de sistemas de alta integración
- Ingeniería industrial y ciencias de gestión

1.5 Áreas de aplicación de modelos y simulación en ingeniería industrial y ciencias de gestión

- Operaciones de manufactura
  - Diseño de plantas
  - Mejoras en productividad
  - Asignación de personal
  - Manufactura computarizada
  - Programación
  - Manipulación de materiales

- Sistemas de transporte
  - Sistemas de pasajeros en trenes
  - Horarios y rutas de autobuses
  - Control de tráfico aéreo
- Sistemas de computación y comunicaciones
  - Procesamiento de señales
  - Diseño de microprocesadores
  - Evaluación de rendimientos
- Planeamiento y control de proyectos
  - Planeamiento de productos
  - Marketing
  - Investigación y desarrollo
- Planeamiento financiero
  - Inversión de capital
  - Análisis de flujo de caja
  - Modelos corporativos
  - Modelos econométricos
- Estudios ecológicos y ambientales
  - Control de inundaciones
  - Control de la polución
  - Agricultura
  - Control de plagas
  - Mantenibilidad de reactores nucleares
- Sistemas de salud
  - Gestión de inventarios
  - Planificación hospitalaria
  - Planificación de personal
  - Manipulación de materiales

2. *Aplicaciones de métodos Monte Carlo*

El amplio campo de acción de la simulación Monte Carlo se explica porque este método transforma un modelo determinístico en un modelo probabilístico (estocástico), permitiendo su aplicación en análisis de riesgos en la toma de decisiones y en herramientas de simulación en procesos de reingeniería.

Un modelo determinístico es un modelo cuantitativo que toma una sola entrada y produce una sola salida, por ejemplo:

Utilidad = ingresos-costo de producción

Un modelo probabilístico es un modelo que toma un conjunto de entradas, de las cuales por lo menos una sigue una distribución de probabilidad, y produce una o más salidas con distribución de probabilidad. Examinaremos a continuación algunos casos de aplicación:

2.1 Monte Carlo y evaluación de integrales

Considerar la siguiente integral:

$$I = \int_a^b g(x)dx \quad \text{estableciendo:} \quad g(x) = \bar{g}(x)$$

$$\text{Se tiene:} \; I = (b-a)\bar{g}(x)$$

$$\text{Donde:} \; x = (b-a)r$$

Siendo r una variable aleatoria continua con distribución uniforme sobre el intervalo [0,1].

Por consiguiente:

$$\bar{g}(x) = (\sum^{n} g(x))/n$$

Ejemplo: para $g(x) = \text{Sen } x$; $a=0$; $b=\pi$; $n=80$; $I=1.989$. El valor exacto de la integral es 2.0.
Se ensaya con diferentes valores de r (ensayos con n valores aleatorios de r) y se obtiene un promedio para la integral I .
Pero esto es demasiado esfuerzo para evaluar integrales simples, puesto que existen métodos numéricos más sencillos; sin embargo, para integrales múltiples de funciones de mayor complejidad, el método Monte Carlo puede ser adecuado, procediéndose del siguiente modo:

$$I = \int_0^a \int_0^b \int_0^c \int_0^d f(x,y,z,w)dxdydzdw$$

$$I = (a-0)(b-0)(c-0)(d-0)\bar{f}(x,y,z,w)$$

Donde:

$$\bar{f}(x,y,z,w) = [\sum^{n} f(x,y,z,w)]/n]$$

Se hacen n ensayos, generando valores aleatorios para x, y, z, w, para obtener un valor promedio para la función y por consiguiente el valor de la integral I.

2.2 *Resolución de la ecuación de Laplace para la conducción de calor en un plano*

$$\delta^2 T / \delta x^2 + \delta^2 T / \delta y^2 = 0$$

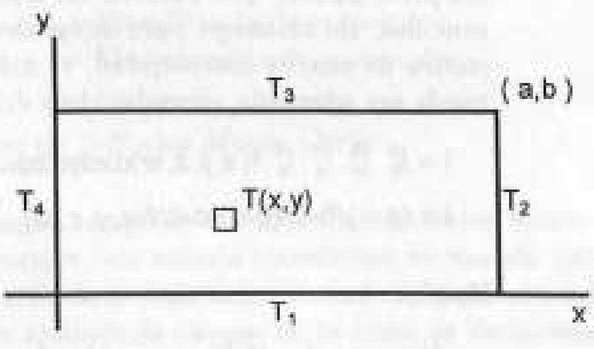
$$T(x,0) = T_1$$
$$T(a,y) = T_2$$
$$T(x,b) = T_3$$
$$T(0,y) = T_4$$

Por tanto: $T(x,y) = p_1 T_1 + p_2 T_2 + p_3 T_3 + p_4 T_4$

La probabilidad p_i se calcula mediante el procedimiento del móvil aleatorio que sigue una dirección aleatoria α con una distribución uniforme en el intervalo [0,360] y un avance promedio constante s (también podría ser aleatorio), partiendo de una posición inicial (x, y):

p_i = N° de veces que el móvil toca una frontera T_i / N° de ensayos totales.

Por consiguiente se hace un barrido de todo el plano empezando cada conjunto de pruebas con una posición (x, y) diferente. Este caso ilustra cómo un modelo probabilístico sustituye a un modelo determinístico.



2.3 *Simulación de una distribución de probabilidades*

Este caso muestra el procedimiento para verificar si datos empíricos siguen una distribución de probabilidad conocida, y también la selección de límites de rangos para efectuar una simulación. El cuadro Nº 1 presenta la información correspondiente para una distribución Poisson con media igual a 2.0 y los límites para los rangos de simulación.

El cuadro Nº 2 muestra los resultados para 100 ensayos para estimar valores de la variable aleatoria x, usando los datos del cuadro 1. Así, se obtiene para x un valor promedio igual a 1.96, valor cercano a 2.0 que es la media de la distribución sujeta a verificación. Eventualmente los datos para los rangos de simulación se obtienen empíricamente.

Cuadro Nº 1

Distribución Poisson con media 2.0			Rango para simulación	
Variable	**Probabilidad**	**Prob. acumulada**	**Límites**	**Variable**
0	0.13530	0.135	0.000	0.000
1	0.27070	0.406	0.136	1.000
2	0.27070	0.677	0.407	2.000
3	0.18040	0.857	0.678	3.000
4	0.09020	0.947	0.858	4.000
5	0.03610	0.983	0.948	5.000
6	0.01200	0.995	0.984	6.000
7	0.00340	0.999	0.996	7.000
8	0.00090	1.000	1.000	8.000

Cuadro Nº 2
Simulación para 100 ensayos

Ensayo	Variable	Nº aleatorio
1	2	0.49412043
2	5	0.96802151
3	0	0.15059021
4	0	0.15779137
5	4	0.88040402
6	2	0.65923355
7	2	0.54402696
8	0	0.10011512
9	2	0.44196889
10	3	0.78774834

Ensayo	Variable	Nº Aleatorio
11	3	0.68777302
12	3	0.83016001
13	0	0.21281059
14	0	0.22411499
15	0	0.24467736
16	0	0.18764498
17	0	0.0727084
18	0	0.28050276
19	0	0.02868575
20	4	0.89824447
21	4	0.87029852
22	2	0.41311166
23	0	0.38089383
24	5	0.9696629
25	0	0.27067823
26	2	0.54224115
27	2	0.56162909
28	5	0.97061476
29	2	0.61891787
30	2	0.6037593
31	3	0.73136714
32	5	0.96802776
33	0	0.2119139
34	2	0.41769994
35	2	0.44245748
36	2	0.58625991
37	4	0.8699475
38	5	0.96569373
39	0	0.28940258
40	2	0.43406701
41	0	0.18340779
42	2	0.45923701
43	0	0.3780067
44	2	0.61515349
45	2	0.63379923
46	3	0.75356344
47	5	0.95788715
48	2	0.62098679
49	4	0.94218816
50	2	0.44128963
51	4	0.893559533
52	4	0.859501465
53	0	0.375211873
54	0	0.167136449
55	2	0.658396838
56	0	0.316856609
57	0	0.060084288
58	0	0.29911763
59	3	0.845572401
60	2	0.577875815
61	2	0.529702548
62	2	0.420053811
63	2	0.559809582
64	0	0.101234501
65	2	0.435359743
66	4	0.879359635
67	0	0.402300279
68	0	0.202367297
69	2	0.660553625
70	2	0.508473884
71	4	0.933343819
72	2	0.580975182
73	5	0.968591199
74	3	0.745496448
75	3	0.731938514
76	2	0.579473253
77	0	0.218143262
78	2	0.596299365
79	2	0.467369067
80	2	0.439355331
81	0	0.120031717
82	0	0.042822714
83	3	0.773199133
84	3	0.8000123
85	0	0.132129939
86	4	0.859458734
87	5	0.955548865
88	2	0.657609914
89	2	0.598290351
90	0	0.020868694
91	0	0.162770520
92	3	0.780607592
93	2	0.55848726
94	0	0.11470758
95	3	0.754465522
96	3	0.817213936
97	0	0.06938182
98	2	0.610179688
99	3	0.786040275
100	4	0.912868628

Valor promedio = $\sum x/n$; $\sum x=196$; $n=100$

Valor promedio = 196/100 = 1.96

Al determinarse un valor promedio de 1.96, cercano a la media de 2.00, se verifica que concuerde con la distribución Poisson y por consiguiente los rangos para simulación serán correctos.

2.4 *Distribuciones de probabilidades empíricas*

En este caso los datos de partida provienen de mediciones experimentales (fuente empírica) como puede observarse en la primera parte del cuadro N° 3. Ahí se indican los valores de la variable, su probabilidad de ocurrencia y la probabilidad acumulativa. Eventualmente la fuente empirica reporta los valores de frecuencia para cada valor de la variable, en cuyo caso la probabilidad se obtiene como el porcentaje del número de ocurrencia de un valor de la variable (frecuencia) sobre el número total de ocurrencias.

Cuadro N° 3

X	Probabilidad acumulada	Probabilidad
1	0.50	0.50
2	0.30	0.80
3	0.20	1.00

Rango de r	Probabilidad	X
0.00 - 0.50	0.50	1
0.51 - 0.80	0.30	2
0.81 - 1.00	0.20	3

En la segunda parte del cuadro N° 3 se indican los rangos para efectuar una simulación. Se generan valores aleatorios para r en el intervalo [0,1] y en cada ensayo ese valor se ubica en un rango y de allí se determina el valor de x correspondiente. Por ejemplo si $r=0.37$, entonces $x=1$.

2.5 *Simulación de defectos en un producto ensamblado*

Este caso trata del ensamblaje de un producto C a partir de los componentes A y B. El reporte de defectos de fabricación para A y B aparecen en el cuadro Nº 4. Con éstos se determinará el promedio de defectos en el producto C.

Cuadro Nº 4

Defectos	Frecuencia A	Frecuencia B
0	5	2
1	5	3
2	15	5
3	30	10
4	20	20
5	10	40
6	5	10
7	5	5
8	3	3
9	2	2
	100	100

Siguiendo las pautas del caso anterior se determinan para los componentes A y B sus respectivas probabilidades a partir de las frecuencias de defectos (cuadro Nº 4), los resultados se muestran en los cuadros 5 y 6 para los componentes A y B respectivamente.

Cuadro Nº 5

Defectos A	Probabilidad	Prob. acumulada
0	0,05	0,05
1	0,05	0,10
2	0,15	0,25
3	0,30	0,55
4	0,20	0,75
5	0,10	0,85
6	0,05	0,90
7	0,05	0,95
8	0,03	0,98
9	0,02	1,00

Cuadro N° 6

Defectos B	Probabilidad	Prob. acumulada
0	0,05	0,06
0	0,02	0,02
1	0,03	0,05
2	0,05	0,10
3	0,10	0,20
4	0,20	0,40
5	0,40	0,80
6	0,10	0,90
7	0,05	0,95
8	0,03	0,98
9	0,02	1,00

Con los resultados anteriores (cuadros 5 y 6) se hacen los cuadros 7 y 8 conteniendo los límites para los rangos de simulación. Este formato es apropiado para utilizar la funcion de hoja de cálculo Buscarh (por ejemplo Excel).

Cuadro N° 7

Limite	Defectos
0,00	0
0,06	1
0,11	2
0,26	3
0,56	4
0,76	5
0,86	6
0,91	7
0,96	8
1,00	9

Cuadro N° 8

Limite	Defectos
0,00	0
0,03	1
0,06	2
0,11	3
0,21	4
0,41	5
0,81	6
0,91	7
0,96	8
1,00	9

En el cuadro N° 9 se muestran los resultados para 20 ensayos utilizando los datos de los cuadros 7 y 8. Por ejemplo, para el ensayo 1 se generaron números aleatorios para A y B (0,14 y 0,15) los cuales asignaron para A y B, 2 y 3 defectos respectivamente y por consiguiente 6 defectos para C; es decir el producto de 2 por 3 igual 6. En el cuadro N° 9 se indican para C los defectos acumulados (columna 5) y el promedio de defectos (columna 6). Después de 20 ensayos el promedio de defectos en el producto C es 13,3 lo cual se aproxima por exceso a 14.

Cuadro N° 9
Simulación para 20 ensayos

Ensayo	Defecto A	Defecto B	Defecto C	Defecto C acumulado	Defectos C promedio
1	2	3	6	6	6,0
2	4	3	12	18	9,0
3	5	3	15	33	11,0
.	..	....	....		
.	.	.	..	...	....
.	.	.	..	...	....
19	4	6	24	256	13,5
20	2	5	10	266	13,3

2.6 Simulación Monte Carlo del cálculo de utilidades en la fabricación y venta de un producto de consumo masivo (2)

Una empresa comercializa un artículo de consumo masivo con un precio en el mercado de US$15. El departamento de ventas informa que existe incertidumbre en la colocación de los artículos, lo que puede manejarse con una distribución normal con media de 1 millón y desviación estándar de 0.1 millón. El departamento de producción informa que por la puesta en marcha de nueva tecnología existe incertidumbre en el costo de producción el cual sigue una distribución normal con media US$12 y una desviación estándar de US$2. Con estos datos se desea estimar las utilidades mediante simulación Monte Carlo y comparar con el uso del *software* DPL.
La utilidad se determina como:

Utilidad = N° artículos vendidos (US$15-costo de producción)

En los cuadros adjuntos (cuadros 10 y 11) se muestran los resultados obtenidos mediante *software*, pero que se explican a continuación con un ejemplo de cálculo manual para fines ilustrativos del método Monte Carlo.

Artículos vendidos (x en millones) con distribución normal:

$x = [(\Sigma r_i - 6)\sigma + \mu]$; σ=0.1 M ; μ=1 M;

r = N° aleatorio en el intervalo [0, 1]

$\sum r =$ 0.897+0.592+0.328+0.841+0.665+0.346+0.063+ 0.113+0.575+0.627+0.440+0.053 = 5.540

x = [(5.54 – 6)0.1+1] = 0.954 M=954.000 artículos

Costo de producción (y en dólares) con distribución normal :

$y = [(\sum ri - 6)\ \sigma + \mu]$; $\sigma = 2$ \$; $\mu = 12$ \$;

r = N° aleatorio en el intervalo [0, 1].

$\sum r =$ 0.238+0.781+0.066+0.701+0.344+0.486+0.588+ 0.053+0.919+0.567+0.664+0.171=5.578

y=[(5.578 – 6) 2+12]=11.156 \$

Utilidad = 954.000 (15 – 11.156) = 3.667.176 \$

El cuadro N° 10 muestra los resultados obtenidos con Monte Carlo empleando @ RISK y el cuadro N° 11 muestra los resultados obtenidos con DPL. Alternativamente los cálculos de la simulación Monte Carlo puede efectuarse con hoja de cálculo,por ejemplo usando Excel con Visual Basic (3).

Cuadro N° 10

Simulación Monte Carlo de ventas, costo de producción y utilidad

Ensayo	Artículos vendidos	Costo de producción (\$)	Utilidad(\$)
1	1.114.708	8.586	7.149.268
2	1.085.975	13.020	2.149.450
.			
.			
99	824.767	11.565	2.833.179
100	1.002.495	11.040	4.128.074
Promedio ponderado	**1.002.639**	**11.893**	**3.094.941**

Nota: Cada ensayo tiene la misma probabilidad = 1/100 = 0,01

Cuadro N° 11
Simulación DPL de ventas, costo de producción y utilidad

Ensayo	Probabilidad vendidos	Artículos ($)	Costo de producción ($)	Utilidad
1	0.00133	3.742.118	15. 464	- 1.724.064
2	0.00533	3.742.118	12. 000	11.226.355
3	0.00133	3.742.118	8. 536	24.176.774
4	0.05908	1.562.500	15. 464	- 721.451
5	0.23633	1.562.500	12. 000	4.681.520
6	0.05908	1.562.500	8. 536	10.112.341
7	0.10625	652.413	15. 464	4.208.063
8	0.42500	652.413	12. 000	1.952.184
9	0.10625	652.413	8. 536	- 303.695
Promedio ponderado probabilístico		1.000.000	12.000	3.000.000

La principal diferencia entre Monte Carlo puro (MC) y DPL es que MC muestrea sobre todo el rango de la variable aleatoria durante la simulación, en tanto que DPL muestrea selectivamente sobre partes del rango, por lo cual emplea menos ensayos. MC y DPL arrojan los valores promedios para la utilidad de US$3.094.941 y tres millones de dólares americanos, respectivamente.

2.7 *Simulación Monte Carlo de existencias en un almacén de productos terminados*

En el almacén de una fábrica de calentadores de agua para uso doméstico ingresan los calentadores fabricados durante el día siguiendo una distribución Poisson. Las ventas se realizan en forma aleatoria,donde los compradores concurren siguiendo una distribución Poisson y los calentadores vendidos a cada uno tiene una distribución empírica según los datos que aparecen en el cuadro adjunto. Se requiere plantear el procedimiento para estudiar la existencia en el almacén durante el día.

Cuadro Nº 12

Número calentadores vendidos	Frecuencia
10	2
20	5
30	17
40	44
50	30
60	12
70	4
80	1

La existencia durante el día es:
C. existentes = C. ingresados – C. vendidos + existencia del día anterior

El flujo de calentadores ingresados se define mediante una distribución Poisson. El flujo de calentadores vendidos resulta del producto del flujo de compradores (definidos por una distribución Poisson) multiplicado por la frecuencia de venta a cada comprador (definida por una distribución empírica. Se hace el balance de flujos, tomando en cuenta la existencia del día anterior y se determina la existencia para el día actual.

2.8 Estimación de la demanda de un producto en un escenario con incertidumbre

Éste es un caso que ocurre con frecuencia en el estudio de mercado en los cursos de Seminario de Investigación y Proyectos que se llevan en ingeniería industrial. Se recomienda emplear los datos disponibles para estimar los intervalos de :

Demanda (D) : [a, b]
Frecuencia (F) : [c, d]

El pronóstico para un próximo periodo se estima con el promedio de n ensayos :

$$D = a + (b - a)r_d \;;\; \overline{D} = \Sigma D_i / n$$

r = Nº aleatorio en el intervalo [0,1]

$$F = c + (d - c)r_f \;;\; \overline{F} = \Sigma F_i / n$$

r = Nº aleatorio en el intervalo [0,1]

Donde r corresponde a una variable aleatoria independiente con distribución uniforme en el intervalo [0, 1]. Se realizan varios ensayos para obtener valores promedios de F y D.
Se puede emplear la función de generación de números de una hoja de cálculo (Excel) o de una calculadora para un estimado preliminar.

3. *Conclusiones*

- El método Monte Carlo tiene uso en la actualidad en sus diferentes modalidades de ejecución. Se efectúan los cálculos manualmente, con hojas de cálculo, y con *software* especializado como @RISK, DATA, y Crystal Ball.
- La simulación Monte Carlo como método de su clase permite investigar sistemas complejos con elementos estocásticos que no pueden evaluarse analíticamente, bajo condiciones operativas preestablecidas.
- Se tiene flexibilidad y mayor control de experimentación en la simulación que en las pruebas en el sistema real .
- La simulación Monte Carlo puede ser un modo efectivo y exacto para incluir el efecto de la incertidumbre en el análisis del sistema.
- Si el número de ensayos es insuficiente, Monte Carlo no produce un valor esperado preciso y es difícil expresar explícitamente la dependencia entre variables de incertidumbre.
- La simulación Monte Carlo puede manejar tanto sistemas pequeños como sistemas muy grandes.
- Existe *software* especializado que, además del aspecto de cálculo numérico, puede incluir el análisis de riesgo para la toma de decisiones.

Bibliografía

a. Fuentes citadas

Applied Decision Analysis, Inc.
"What is DPL". <http://www. adainc.com/ sw/whatis. html > [consulta: 17 de setiembre de 1998].

Gallant, L.
"Monte Carlo Simulation". Menlo Park, California: Applied Decision Analysis, Inc.,1998. <http:// www. dpl. adainc.com/news/ fall97/ whitepap.htm> [consulta: 17 de setiembre de 1998].

García, F.
Aplicaciones para Excel 5 y Excel 95. México: Alfaomega Grupo Editor S.A. de C.V., 1997. pp. 19-31.

Hansen, G.A.
Automatización. Mexico:Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., 1998, pp. 123-138.

Jelen, F.C.
Cost and Optimization Engineering. New York: Mc Graw-Hill Co., 1970, pp. 151-169.

Law, M.A. y W.D. Kelton
Simulation Modeling and Analysis. 2a. edición. New York: McGraw-Hill Co., 1991, pp. 112-116.

Prawda, J.
Métodos y modelos de investigación de operaciones. Vol. 2. México: Limusa, 1980, pp. 323-353.

Pritsker, A.A.B.
Introduction to Simulation and SLAM II. New York: John Wiley & Sons, 1995, pp. 67-95.

Raczynski, S.
Simulación por computadora. México: Grupo Noriega Editores, 1993, pp. 21-34.

Savage, S.
Statistics and Public Policy: Statistical Analysis for the Masses. Oxford: Oxford University Press, 1996, pp.1-16.

b. Fuentes complementarias.

@ RISK, Palisade Corp.
Newfield NY.

Crystal Ball, Decisioneering Inc.
Boulder, CO.

DATA, Treeage Inc.
Boston.

DPL, Applied Decision Analysis
Menlo Park, CA.

Hertz, David B.
"Risk analysis in capital investment". *Harvard Business Review*. Vol 57, 5, 1979.

Savage, Sam L.
Fundamental Analytic Spreadsheet Tools for Quantitative Management. New York: McGraw-Hill, 1993.

——.
Fundamental Analytic Spreadsheet Tools for Production Operations Management. New York: McGraw-Hill, 1994.

c. Fuentes referenciales.

Definitive Software
"Monte Carlo simulation and modeling". <http:// www.definitivesoftware.com> [consulta: 3 de marzo de 1998].

Introduction to Monte Carlo Methods
<http://www.ccs.uky.edu/ccs/csep/MC/NODE1html> [consulta: 3 de marzo de 1998].

Joel T. Johnson
Monte Carlo Simulations of Backscattering Enhancement. JOEL@ewt.mit.edu Backscattering enhancement.<http://www.mhpcc.edu/research/ss95/ ssp19.html> [consulta: 3 de marzo de 1998].

JAVA Simulation of Hybrid Monte Carlo
<http://www.cise.ufl.edu/~thorndyb/hmcdemo.html> [consulta: 3 de marzo de 1998].

Monte Carlo Production and Analysis
<http://atlasinfo.cern.ch/Atlas/SOFTWARE/TDR/htlm/TDR-21.html> [consulta: 3 de marzo de 1998].

Monte Carlo Simulation
<http://venus.ce.jhu.edu/book/chp5/node8.html0> [consulta: 3 mar. 1998].

Monte Carlo Simulation
<http://www.circle4. com/pww/mc/index.html> [consulta: 3 de marzo de 1998].

Vanguard Decision Pro
<http://www.vanguardsw.com> [consulta: 3 de marzo de 1998].

What is Monte Carlo Simulation?
<http: // ce. ecn.purdue.edu/~lianshin/whatmc.html> [consulta: 3 de marzo de 1998].

Savage, Sam L.
"Monte Carlo Simulation for Excel". <http://www.leland.stanford.edu/~savage> [consulta: 3 de marzo de 1998].